Quadratische Gleichungen

Lösung durch Äquivalenzumformung

klassische Variante

Grundsätzlich unterscheidet man drei Fälle:

Parabel schneidet x-Achse
⇨ zwei Nullstellen

Parabel berührt x-Achse
⇨ eine Nullstelle

Parabel schneidet x-Achse nicht
⇨ keine Nullstelle(n)

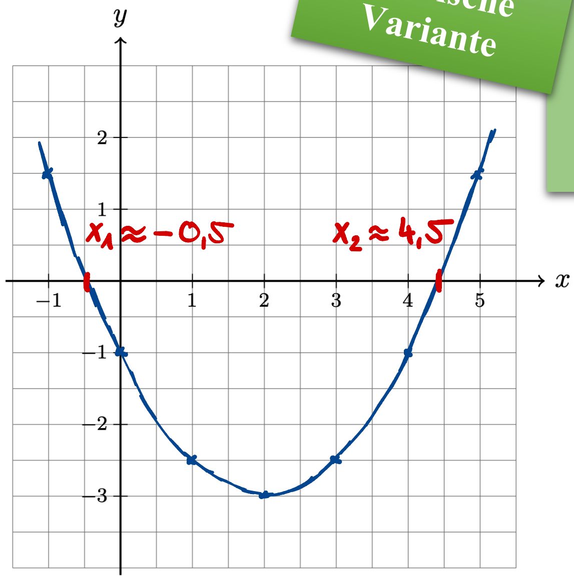
Bestimmen Sie zeichnerisch die Nullstellen der quadratischen Funktion

$y = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3$

Als Nullstellen erhält man (auf eine Nachkommastelle abgelesen):

$x_1 \approx -0{,}5$

$x_2 \approx 4{,}5$



Zeichne den Graphen der Funktion in das KOSY …

… und lies die Nullstellen aus der Zeichnung ab.

Um die Nullstellen rechnerisch zu bestimmen, setzt man den Funktionsterm *„gleich Null"*.

Merke:

Für die Berechnung der Nullstellen einer Funktion wird der Funktionsterm *„gleich Null"* gesetzt. $y = 0$

$$0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3 = 0$$

Diese Art von Gleichung bezeichnet man als quadratische Gleichung, weil in ihr die Variable im Quadrat enthalten ist.

Durch Äquivalenzumformung erhält man:

Stelle nun die Gleichung entsprechend der vorgegebenen Äquivalenzumformungen um.

$$0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3 = 0 \qquad | +3$$

$$0{,}5 \cdot (x-2)^2 = 3 \qquad | :0{,}5$$

$$(x-2)^2 = 6 \qquad | \sqrt{}$$

Die Besonderheit der quadratischen Gleichung ist, dass es hier zwei Lösungen gibt, die die Gleichung erfüllen: eine **positive** und eine **negative**. Der Grund dafür liegt in der Umkehrung des *Radizierens* (*Wurzelziehens*), dem *Quadrieren*: weil nämlich **$-\sqrt{6}$ quadriert** die gleiche Zahl ergibt wie **$+\sqrt{6}$ quadriert**.

$$x - 2 = -\sqrt{6} \quad \vee \quad x - 2 = +\sqrt{6} \qquad | +2$$

$$x = -\sqrt{6} + 2 \quad \vee \quad x = +\sqrt{6} + 2$$

$$x_1 \approx -0{,}45 \quad \vee \quad x_2 \approx 4{,}45$$

$$\mathbb{L} = \{-0{,}45; 4{,}45\}$$

Das Zeichen „v" bedeutet „oder".

Auf zwei Nachkommastellen gerundet."

$$-2 \cdot (x+1{,}5)^2 + 8 = 0 \qquad |-8$$

$$-2 \cdot (x+1{,}5)^2 = -8 \qquad |:(-2)$$

$$(x+1{,}5)^2 = 4 \qquad |\sqrt{\;}$$

$$x + 1{,}5 = -\sqrt{4} \quad \vee \quad x + 1{,}5 = +\sqrt{4} \qquad |-1{,}5$$

$$x = -\sqrt{4} - 1{,}5 \quad \vee \quad x = \sqrt{4} - 1{,}5$$

$$x_1 \approx -3{,}5 \quad \vee \quad x_2 \approx 0{,}5$$

$$\mathbb{L} = \{ -3{,}5 \; ; \; 0{,}5 \}$$

Falls du mit der Aufgabe Schwierigkeiten hast, schaue auf der Vorderseite des Arbeitsblatts nach ...

... am Schluss: Lösungsmenge nicht vergessen

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen auf die gleiche Weise (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

... und nun ganz ohne Hilfe.

a) $y = -3 \cdot (x-2)^2 + 3$

b) $y = 2 \cdot (x+3{,}5)^2 - 10$

c) $y = -0{,}25 \cdot (x+2{,}5)^2 + 4$

d) $y = \frac{2}{3} \cdot (x-1)^2 - 3$

Folgende Funktionen haben keine zwei Nullstellen, sondern lediglich **eine** bzw. **gar keine**. Weisen Sie dies rechnerisch auf die gleiche Weise wie oben nach.

Überlege: Wie muss eine Parabel im KOSY liegen, dass sie nur eine oder gar keine Nst. hat? Fertige zur Veranschaulichung eine Skizze an.

a) $y = -2 \cdot (x+1{,}5)^2$

b) $y = \frac{1}{3} \cdot (x+3{,}5)^2 + 10$

c) $y = -0{,}25 \cdot (x+1)^2 - 2$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2$

Etwas komplizierter ist die Berechnung von Nullstellen, wenn die Funktionsgleichung **nicht in der Scheitel(punkts)form** vorliegt, sondern in der **allgemeinen Form.**
In diesem Fall wird die quadratische Funktion zuerst durch ____________________

____ auf Scheitel(punkts)form gebracht.

Anschließend verfährt man wie oben.

a) $y = 2x^2 - 4x + 1$

b) $y = -0{,}5x^2 + 2x$

c) $y = -2x^2 - 4x - 2$

d) $y = x^2 - 2x + 3$

Hausaufgabe: Das Arbeitsblatt fertig machen.

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen auf die gleiche Weise (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

a) $y = -3 \cdot (x-2)^2 + 3$

b) $y = 2 \cdot (x+3{,}5)^2 - 10$

c) $y = -0{,}25 \cdot (x+2{,}5)^2 + 4$

d) $y = \frac{2}{3} \cdot (x-1)^2 - 3$

„gleich Null stellen“ nicht vergessen!

a)

$$-3 \cdot (x-2)^2 + 3 = 0 \quad | -3$$
$$-3 \cdot (x-2)^2 = -3 \quad | :(-3)$$
$$(x-2)^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$

$$x-2 = -\sqrt{1} \quad \lor \quad x-2 = +\sqrt{1} \quad | +2$$
$$x = -1+2 \quad \lor \quad x = 1+2$$
$$x = 1 \quad \lor \quad x = 3$$

$$\mathbb{L} = \{1; 3\}$$

b)

$$2 \cdot (x+3{,}5)^2 - 10 = 0 \quad | +10$$
$$2 \cdot (x+3{,}5)^2 = 10 \quad | :2$$
$$(x+3{,}5)^2 = 5 \quad | \sqrt{}$$

$$x+3{,}5 = -\sqrt{5} \quad \lor \quad x+3{,}5 = +\sqrt{5} \quad | -3{,}5$$
$$x = -\sqrt{5} - 3{,}5 \quad \lor \quad x = \sqrt{5} - 3{,}5$$
$$x = -5{,}74 \quad \lor \quad x = -1{,}26$$

$$\mathbb{L} = \{-5{,}74; -1{,}26\}$$

c) $-0{,}25\cdot(x+2{,}5)^2+4=0 \quad |-4$

$-0{,}25\cdot(x+2{,}5)^2=-4 \quad |:(-0{,}25)$

$(x+2{,}5)^2=16 \quad |\sqrt{}$

$x+2{,}5=-\sqrt{16} \quad \vee \quad x+2{,}5=+\sqrt{16} \quad |-2{,}5$

$x=-4-2{,}5 \quad \vee \quad x=4-2{,}5$

$x=-6{,}5 \quad \vee \quad x=1{,}5$

$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{-6{,}5;\ 1{,}5\}}}$

d) $\frac{2}{3}\cdot(x-1)^2-3=0 \quad |+3$

$\frac{2}{3}\cdot(x-1)^2=3 \quad |:\frac{2}{3}$

$(x-1)^2=4{,}5 \quad |\sqrt{}$

$x-1=-\sqrt{4{,}5} \quad \vee \quad x-1=+\sqrt{4{,}5} \quad |+1$

$x=-\sqrt{4{,}5}+1 \quad \vee \quad x=\sqrt{4{,}5}+1$

$x=-1{,}12 \quad \vee \quad x=3{,}12$

$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{-1{,}12;\ 3{,}12\}}}$

Folgende Funktionen haben keine zwei Nullstellen, sondern lediglich **eine** bzw. **gar keine**. Weisen Sie dies rechnerisch auf die gleiche Weise wie oben nach.

a) $y = -2 \cdot (x + 1{,}5)^2$

b) $y = \frac{1}{3} \cdot (x + 3{,}5)^2 + 10$

c) $y = -0{,}25 \cdot (x + 1)^2 - 2$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2$

a)
$$-2 \cdot (x + 1{,}5)^2 = 0 \qquad | : (-2)$$
$$(x + 1{,}5)^2 = 0 \qquad | \sqrt{}$$

$$x + 1{,}5 = \underbrace{-\sqrt{0}}_{=0} \quad \vee \quad \cancel{x + 1{,}5 = \underbrace{+\sqrt{0}}_{=0}} \qquad | -1{,}5$$

$$x = -1{,}5$$

keine Fallunterscheidung nötig

→ nur 1 Nullstelle

$\mathbb{L} = \{-1{,}5\}$

b)
$$\frac{1}{3} \cdot (x + 3{,}5)^2 + 10 = 0 \qquad | -10$$
$$\frac{1}{3} \cdot (x + 3{,}5)^2 = -10 \qquad | : \frac{1}{3}$$
$$(x + 3{,}5)^2 = -30 \qquad | \sqrt{}$$

$\lightning$

Von negativen Zahlen kann nicht die Wurzel gezogen werden

→ keine Nullstelle

$\mathbb{L} = \{\ \}$ oder $\mathbb{L} = \emptyset$

Leere Menge

c)

$$
\begin{aligned}
-0{,}25 \cdot (x+1)^2 - 2 &= 0 && \mid +2 \\
-0{,}25 \cdot (x+1)^2 &= 2 && \mid : (-0{,}25) \\
(x+1)^2 &= -8
\end{aligned}
$$

$$\lightning$$

→ keine Nullstelle $\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \emptyset}}$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 &= 0 && \mid : \frac{1}{2} \\
(x-2)^2 &= 0 && \mid \sqrt{} \\
x - 2 &= 0 && \mid +2 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2}}
\end{aligned}
$$

→ nur 1 Nullstelle $\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{2\}}}$